

РЕШЕНИЕ СОПРЯЖЁННЫХ ЗАДАЧ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНЕ С ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

Лабораторная работа №9, 10

План занятия:

1. Цель работы
2. Дифференциальные уравнения турбулентного пограничного слоя с продольным градиентом давления
3. Моделирование турбулентности
4. Модель турбулентности Прандтля
5. Модель турбулентности Себиси - Смита
6. Описание решаемой задачи
7. Метод решения
8. Порядок проведения моделирования
9. Содержание отчёта
10. Контрольные вопросы

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сопряжённый расчёт турбулентного динамического и теплового пограничных слоёв на пластине **по неявной схеме** с устранением нелинейности методом простых итераций. Использование линеаризации источникового члена для обеспечения условий диагонального преобладания. Моделирование турбулентности с использованием моделей Прандтля и Себиси-Смита.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ПРОДОЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

На лекциях и предыдущих лабораторных работах мы получили систему дифференциальных уравнений турбулентного неизотермического пограничного слоя, учитывающую действие и работу сил трения, давления и тяжести. Однако при моделировании мы оставляли только силу трения. Физически такое пренебрежение силами давления и тяжести возможно, если рассматривается задача обтекания **плоской горизонтальной пластины с высокой скоростью**. Если пограничный слой развивается на пластине расположенной под углом к набегающему потоку или на стенке конфузорного (дифузорного) плоского канала, то силой давления пренебрегать нельзя.

С учётом **дополнительных Рейнольдсовых напряжений** систему уравнений турбулентного пограничного слоя с градиентом давления можно записать в виде:

уравнение неразрывности (сохранения массы):

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

уравнения движения (сохранения импульсов):

по оси x

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} - \rho \langle w'_y w'_x \rangle \right) - \frac{dp}{dx}, \quad (2)$$

по оси y

$$p = \text{const} \quad (3)$$

уравнение энергии:

$$\rho w_x c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho w_y c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} - c_p \rho \langle w'_y T' \rangle \right) + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 + \mu \left\langle \left(\frac{\partial w'_x}{\partial y} \right)^2 \right\rangle + w_x \frac{dp}{dx} \quad (4)$$

Здесь: ρ - плотность движущейся среды [кг/м³], w_x, w_y - продольная и поперечная скорость потока [м/с], p - давление [Па], μ - коэффициент динамической вязкости среды, [Па с] x, y - продольная и поперечная координаты, c_p - удельная массовая теплоёмкость среды, [Дж/(кг град)], T - температура потока, [К], λ - коэффициент теплопроводности среды, [Вт/(м град)].

В рамках данной работы мы будем считать, что параметры состояния связаны **уравнением состояния идеального газа.**

$$p = \rho RT, \quad (5)$$

где: $R = 8314,31 / M$ - газовая постоянная, [Дж/(кг град)], M - молекулярный вес, [г / моль].

Можно заметить, что в уравнения (1)-(4) продольный градиент давления входит в правую часть, наряду с диссипативным членом. И градиент давления и диссипация кинетической энергии представляют собой, так называемые, источниковые члены уравнений движения и энергии. Для рассматриваемых условий источниковые члены не зависят от искомых переменных. Диссипативный член в уравнении энергии зависит от распределения скорости, которая определяется уравнениями движения и неразрывности, а градиент давления должен быть определён из решения невязких уравнений движения на внешней границе пограничного слоя. В общем случае, конечно, источниковые члены могут зависеть от искомых переменных.

Получим связь градиента давления и параметров набегающего потока на внешней границе пограничного слоя. Поскольку дифференциальные уравнения (1)-(4) справедливы, как внутри пограничного слоя, так и на его внешней границе, то проведём оценку членов этих уравнений при приближении решения к внешней границе. Здесь и далее условия на входе в расчётную область будем обозначать индексом 0, а на внешней границе индексом e.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} \right)_e + \left(\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} \right)_e &= 0, \\ (\rho w_x)_e \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right)_e + (\rho w_y)_e \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_e &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_e - (\rho \langle w'_y w'_x \rangle)_e \right) - \frac{dp}{dx}, \\ (\rho w_x c_p)_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e + (\rho w_y c_p)_e \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_e &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_e \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_e - (c_p \rho \langle w'_y T' \rangle)_e \right) + \\ + \mu_e \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_e^2 + \mu_e \left\langle \left(\frac{\partial w'_x}{\partial y} \right)_e^2 \right\rangle &+ (w_x)_e \frac{dp}{dx}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из анализа данных экспериментов и численного моделирования известно, что на внешней границе продольная скорость потока, температура, а значит и плотность выходят на постоянные значения, а значит можно записать, что:

$$\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_e \rightarrow 0, \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_e \rightarrow 0, \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_e \rightarrow 0. \quad (7)$$

Турбулентные пульсации, при снижении градиентов скорости также снижаются. Можно предположить, что $(\rho \langle w'_y w'_x \rangle)_e \rightarrow 0$ и $(c_p \rho \langle w'_y T' \rangle)_e \rightarrow 0$.

Используя последние соотношения и соотношения (6) и (7), можно получить:

$$\boxed{\frac{dp}{dx} = -\rho_e (w_x)_e \frac{d(w_x)_e}{dx}, \quad \rho_e c_p \left(\frac{dT_e}{dx}\right) = \frac{dp}{dx}}$$

(8)

или

$$dp = -\rho_e d\left(\frac{(w_x)_e^2}{2}\right), \quad \rho_e c_p dT_e = dp$$

Первое из полученных уравнений представляет собой дифференциальное уравнение Бернулли. Известно, что при постоянной плотности среды (например, для жидкости) в отсутствии вязких сил снижение давления приводит к увеличению кинетической энергии потока и наоборот снижение скорости приводит к росту давления. Для сжимаемой среды (например, для газа) существенную роль начинает играть второе уравнение – уравнение энергии. В этом случае снижение давления приводит к снижению плотности потока, что в свою очередь делает ускорение потока всё более интенсивным, вплоть до звуковых и сверхзвуковых скоростей.

Важно понять, что продольный градиент давления жёстко связан с градиентом продольной скорости набегающего потока. Задавая распределение этой скорости по длине пластины или канала, можно определить градиент давления в каждом поперечном сечении пограничного слоя из соотношений (8).

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Как видно, дополнительные члены уравнений связанные с градиентом давления при осреднении по Рейнольдсу не приводят к появлению ненулевых осреднённых корреляций пульсаций. Однако продольный градиент давления оказывает существенное влияние на развитие турбулентности в пограничном слое, что должно быть учтено в модели турбулентности.

В данной работе мы проведём расчёты для двух моделей турбулентности – модели Прандтля и модели Себиси-Смита. **Модель Прандтля** является простейшей алгебраической моделью турбулентности и, как известно, использование этой модели при описании течений с градиентом давления приводит к существенным расхождениям расчётных и экспериментальных данных. **Модель Себиси-Смита** также является простой алгебраической моделью турбулентности, однако за счёт введения в модель дополнительных эмпирических функций, учитывающих влияние градиента давления, перемежаемости, локализации области ламинарно-турбулентного перехода она является более универсальной и позволяет рассчитывать течения с градиентом давления. На этом простом примере мы познакомимся с **проблемой выбора модели турбулентности** для описания сложных течений.

Обе рассматриваемые модели – это модели турбулентной вязкости. Как и раньше, используя **гипотезу Буссинеска**, для турбулентных напряжений и турбулентного теплового потока запишем:

$$-\rho \langle w'_y w'_x \rangle = \mu_t \frac{\partial w_x}{\partial y}, \quad -c_p \rho \langle w'_y T' \rangle = c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{и} \quad \mu \left\langle \left(\frac{\partial w'_x}{\partial y} \right)^2 \right\rangle = \mu_t \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2.$$

Турбулентное число Прандтля при расчёте теплообмена по моделям Прандтля и Себиси-Смита будем считать постоянным: $Pr_t = 0,9$.

4. МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРАНДТЛЯ

Данная модель подробно была рассмотрена на предыдущей лабораторной работе. Приведём здесь только основные соотношения для справки.

$$\mu_t = \rho \cdot l_m^2 \left| \frac{\partial w_x}{\partial y} \right|, \quad (9)$$

где l_m - длина пути смешения. Длина пути смешения рассчитывается как:

$$l_m = \begin{cases} C_k y \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right), \\ C_1 \delta, \end{cases} \quad (10)$$

где первое уравнение относится к ламинарному подслою, а второе к турбулентному ядру. Переход от ламинарного подслоя к турбулентному ядру определяется в зависимости от y

$$\text{из условия: } C_k y \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right) = C_1 \delta.$$

Здесь $y^+ = v^+ \frac{\rho y}{\mu}$, $v^+ = w_{x0} \sqrt{\frac{c_f}{2}}$ - скорость трения, $\frac{c_f}{2} = \frac{\mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{cr}}{\rho_0 w_{x0}^2}$ - коэффициент трения

на стенке; δ - толщина пограничного слоя, определённая по критерию $(0.995 \cdot u_0)$.

Константы модели: $A^+ = 26$, $C_k = 0.41$ - постоянная Кармана, $C_1 = 0.089$.

5. МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ СЕБИСИ - СМИТА

Модель Себиси-Смита проверена для широкого класса течений¹, исследованных экспериментально, и установлено, что она позволяет получить достаточно точные расчетные данные для многих инженерных задач. В соответствии с подходом Себиси и Смита турбулентный пограничный слой считается состоящим из внутренней и внешней областей, коэффициент турбулентной вязкости в которых описывается различными соотношениями. Эти соотношения являются эмпирическими и получены на основании ограниченного количества экспериментальных данных. Во **внутренней части слоя** на гладкой поверхности коэффициент турбулентной вязкости можно определить по формуле:

$$\mu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial w_x}{\partial y} \right| \gamma_{tr}, \quad 0 \leq y \leq y_c. \quad (11)$$

Входящая в эту формулу длина пути перемешивания l_m выражается соотношением

¹ Себиси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы: Пер. с англ. – М: Мир, 1987. – 592 с.

$$I_m = C_K y \left(1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right), \quad (12)$$

где $C_K = 0.40$, а A - постоянная длина демпфирования, которую можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= 26 \frac{\mu}{\rho N v^+}, \\ N &= \sqrt{1 - 11.8 p^+}, \\ p^+ &= \frac{\mu (w_x)_e}{\rho N (v^+)^3} \frac{d(w_x)_e}{dx}. \end{aligned} \quad (13)$$

Очевидно, что при нулевом градиенте давления $N = 1$, а величина A определяется соотношением $26\mu/(\rho v^+)$.

Входящий в формулу (11) коэффициент перемежаемости γ_{tr} необходим для описания характеристик пограничного слоя в области перехода от ламинарного режима течения к турбулентному. Он определяется эмпирическим соотношением:

$$\gamma_{tr} = 1 - \exp\left(-G(x - x_{tr}) \int_{x_{tr}}^x \frac{dx}{(w_x)_e}\right). \quad (14)$$

Здесь x_{tr} - координата начала области перехода, а коэффициент G , имеющий размерность скорость/(длина)² и вычисляемый в области перехода, определяется выражением:

$$G = 8.33 \times 10^{-4} \rho^2 \frac{(w_x)_e^3}{\mu^2} (Re_x)^{-1.34}. \quad (15)$$

В формулу (11) входит еще один коэффициент перемежаемости γ , который учитывает тот факт, что при приближении к внешней границе пограничного слоя турбулентность становится перемежающейся, т.е. течение бывает турбулентным лишь часть всего времени. Коэффициент γ определяется эмпирическим соотношением:

$$\gamma = \left(1 + 5.5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^6 \right)^{-1}, \quad (16)$$

где δ - координата y точки, в которой $w_x/(w_x)_e = 0.995$.

Во внешней части слоя коэффициент турбулентной вязкости выражается формулой:

$$\mu_t = \alpha \left| \int_0^\infty ((w_x)_e - w_x) dy \right| \gamma \gamma_{tr}, \quad y_c \leq y \leq \delta. \quad (17)$$

В обычных пограничных слоях с $w_x < (w_x)_e$ эта формула сводится к простому соотношению $\mu_t = \alpha (w_x)_e \delta^* \gamma \gamma_{tr}$, где δ^* - толщина вытеснения. Постоянная α равна 0.0168 при числе Рейнольдса, построенном по толщине потери импульса - $Re^{**} \geq 5000$.

При более низких значениях Re^{**} величина α зависит от Re^{**} в соответствии с эмпирической формулой:

$$\alpha = 0.0168 \frac{1.55}{1 + \Pi}, \quad (18)$$

причем эмпирическая корреляционная зависимость Π от Re^{**} имеет вид:

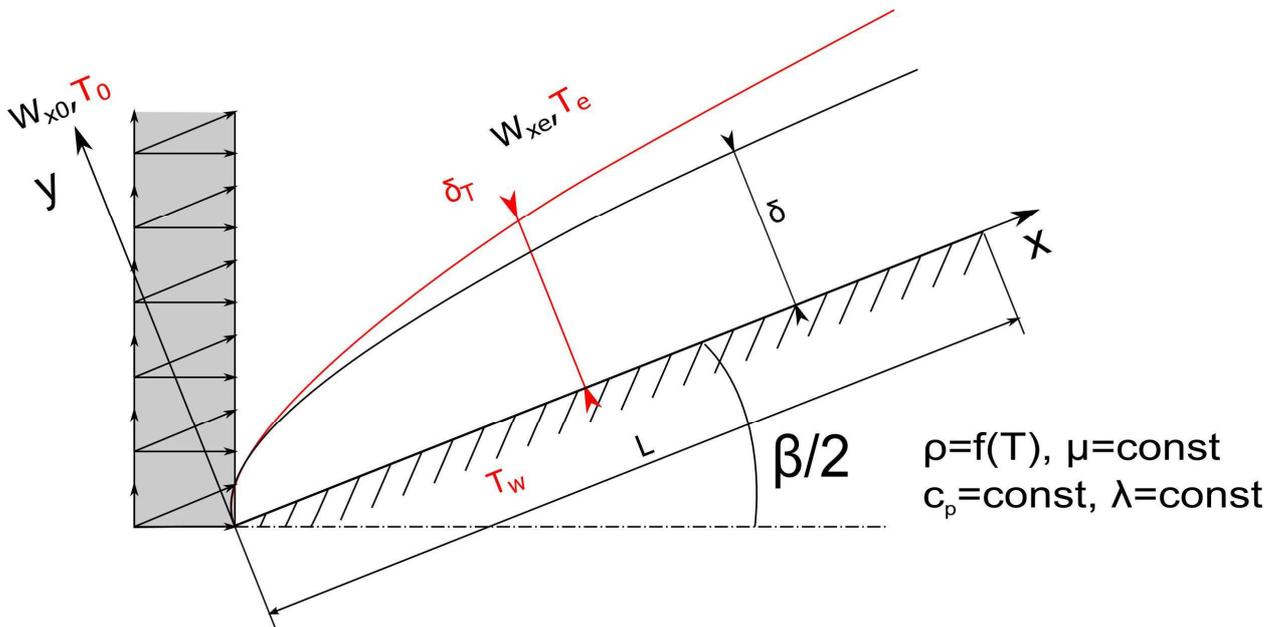
$$\Pi = 0.55 \left(1 - \exp(-0.243z_1^{0.5} - 0.298z_1) \right), \quad (19)$$

где $z_1 = Re^{**}/425 - 1$, при $Re^{**} > 425$.

Граница между внутренней и внешней областями пограничного слоя определяется из условия непрерывности коэффициента турбулентной вязкости. На расстоянии от стенки до этой границы применяется формула для коэффициента турбулентной вязкости для внутренней области до тех пор, пока не будет выполняться равенство μ_t , полученных по формулам (11) и (17), соответственно.

6. ОПИСАНИЕ РЕШАЕМОЙ ЗАДАЧИ

Целью сегодняшней лабораторной работы является расчёт турбулентного динамического и теплового пограничных слоёв **на плоской стенке, расположенной под углом к набегающему потоку, по неявной схеме** с устранением нелинейности методом простых итераций. Описать турбулентность следует с использованием модели Прандтля и Себиси-Смита. Схема течения представлена на рисунке:



Будем считать, что теплоёмкость среды постоянна ($c_p = const$), вязкость и теплопроводность среды также будем считать постоянными, но уравнения пограничного слоя запишем в более общем виде – для переменных коэффициентов переноса. Градиент давления и температуры вдоль пластины определяются по соотношениям (8) исходя из заданного распределения скорости потока на внешней границе пограничного слоя:

$$\boxed{(w_x)_e = (w_x)_0 \cdot x^m, \quad m = \frac{\beta/\pi}{2 - \beta/\pi}}, \quad (20)$$

где β - удвоенный угол атаки пластины к набегающему потоку или угол раствора клина, если рассматривать симметричные течения на плоском клиновидном теле, [рад]. Используя формулы (8) и соотношение (20) для градиента давления можно записать:

$$\begin{aligned} -\frac{dp}{dx} &= \rho_e (w_x)_e \frac{d(w_x)_e}{dx} = (w_x)_0^2 \rho_e x^m m x^{m-1} = \rho_e (w_x)_0^2 \frac{m}{x} \\ w_x \frac{dp}{dx} &= \rho_e w_x (w_x)_0^2 \frac{m}{x} \end{aligned} \quad (21)$$

Система уравнений для рассматриваемого течения может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} &= 0, \\ \rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) + \rho_e (w_x)_0^2 \frac{m}{x} \\ \rho w_x c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho w_y c_p \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 - \rho_e w_x (w_x)_0^2 \frac{m}{x} \end{aligned} \quad (22)$$

Обратим внимание на то, что в источниковых членах, связанных с градиентом давления координата x находится в знаменателе, а это означает, что при $x = 0$ градиент давления равен бесконечности. Конечно решить такие уравнения не удастся, однако исключить из расчёта эту особенность можно задав граничные условия на входе не при $x = 0$, как мы делали раньше, а на некотором малом расстоянии (например, $x = x_0 = 10^{-3}$ метра).

Для решения данной системы уравнений определим граничные условия для искомым переменных w_x, w_y, T . В рассматриваемом случае:

на входе: $w_x(x, y) = w_x(x_0, y) = w_{x0}$; $w_y(x, y) = w_y(x_0, y) = 0$; $T(x, y) = T(x_0, y) = T_0$;

на стенке: $w_x(x, y) = w_x(x, 0) = 0$; $w_y(x, y) = w_y(x, 0) = 0$; $T(x, y) = T(x, 0) = T_w$;

во внешнем потоке: $w_x(x, y) = w_x(x, \delta) = (w_x)_e = (w_x)_0 x^m$; $T(x, y) = T(x, \delta) = T_e$, где T_e определяется из соотношения:

$$\begin{aligned} \rho_e c_p \left(\frac{dT_e}{dx} \right) &= -\rho_e (w_x)_e^2 \frac{m}{x} \\ dT_e &= -(w_x)_e^2 \frac{1}{c_p} \frac{m}{x} dx \\ \int_{T_0}^{T_e} dT_e &= -(w_x)_0^2 \frac{m}{c_p} \int_0^x x^{2m-1} dx \\ T_e &= T_0 - \frac{(w_x)_0^2}{2c_p} x^{2m} \end{aligned} \quad (23)$$

Для описания турбулентности будем использовать модель Прандтля и Себиси-Смита, представленные в предыдущем параграфе. Поскольку эти модели относятся к алгебраическим моделям турбулентности, задавать какие-либо дополнительные граничные условия не требуется.

Как и раньше интегральные параметры (коэффициент трения, коэффициент теплоотдачи, локальные и средние числа Нуссельта) в существенной степени будут определяться свойствами среды (числом Прандтля - $Pr = \mu_p / \lambda$), скоростью набегающего потока (числом Маха - $M_0 = w_{x0} / a_0$), фактором неизотермичности $\psi = T_w / T_0$. Кроме этого в потоках с градиентом давления на характеристики течения существенным образом влияет интенсивность ускорения или торможения. В безразмерном виде градиент давления принято характеризовать либо параметром m , либо параметром Кейса:

$$K = \frac{\mu_e}{\rho_e (w_x)_e^2} \frac{d(w_x)_e}{dx} = \frac{\mu_e}{\rho_e (w_x)_0} \frac{m}{x^{m+1}} \quad (24)$$

В качестве результатов расчётов следует получить зависимости:

$$\begin{aligned} \frac{c_f}{2} &= f(Re, Pr, M_0, \psi, (m \text{ или } K)) \\ Nu &= f(Re, Pr, M_0, \psi, (m \text{ или } K)) \end{aligned} \quad (25)$$

Локальный коэффициент сопротивления трения для рассматриваемой задачи принято рассчитывать по формуле:

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\mu_e \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_w}{\rho_e (w_x)_e^2}, \quad (26)$$

локальное число Нуссельта:

$$Nu = \frac{\alpha x}{\lambda_e} = \frac{q_w}{(T_e - T_w) \lambda_e} \frac{x}{\lambda_e} = \frac{-\lambda_e \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w x}{(T_e - T_w) \lambda_e}, \quad (27)$$

локальное число Рейнольдса:

$$Re = \frac{\rho_e (w_x)_e x}{\mu_e}, \quad (28)$$

за характерный размер выбрано расстояние от начала пластины, все свойства определяются по параметрам на внешней границе пограничного слоя.

7. МЕТОД РЕШЕНИЯ

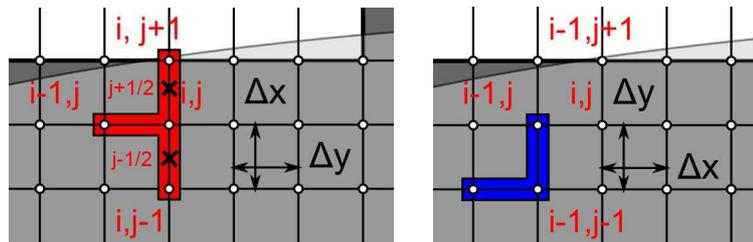
В данной лабораторной работе мы воспользуемся **неявной схемой дискретизации** и получим решение уравнений пограничного слоя **в сопряжённой постановке**, при совместном решении уравнений энергии, движения, неразрывности и модели турбулентности. Для этого воспользуемся **методом простых итераций**. Используемый метод подробно расписан в методических материалах к предыдущей лабораторной работе. В данных материалах опишем **лишь ключевые отличия**.

Высоту расчётной области определим из оценок толщин теплового и динамического пограничных слоёв при турбулентном режиме течения:

$$\delta_L = p \cdot \max \left(\frac{0.37L}{Re_L^{0.2}}, \frac{0.37L}{Re_L^{0.2} Pr^{0.6}} \right). \quad (29)$$

Следует отметить, что ускоряющий градиент давления приводит к уменьшению толщины пограничного слоя и к подавлению турбулентности, поэтому оценки по формуле (29) могут быть завышены. С другой стороны тормозящий градиент давления приводит к росту толщины пограничного слоя и оценки по формуле (29) могут оказаться заниженными. Следует подбирать необходимую высоту расчётной области, варьируя коэффициент r .

Для **неявного метода** решения уравнений пограничного слоя шаблоны дискретизации для уравнений движения и энергии представлены на левом рисунке снизу, для уравнения неразрывности на правом:



Поскольку в новые источникные члены уравнений (22) не входят производные, их дискретизация сводится только к определению соответствующих индексов при переменных. Систему уравнений (22) в дискретной форме можно записать следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \rho_{i,j} (w_x)_{i,j} \left(\frac{(w_x)_{i,j} - (w_x)_{i-1,j}}{\Delta x} \right) + \rho_{i,j} (w_y)_{i,j} \left(\frac{(w_x)_{i,j} - (w_x)_{i,j-1}}{\Delta y} \right) = \\
 & = \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{(\mu + \mu_t)_{i,j+1} + (\mu + \mu_t)_{i,j}}{2} \left(\frac{(w_x)_{i,j+1} - (w_x)_{i,j}}{\Delta y} \right) - \frac{(\mu + \mu_t)_{i,j} + (\mu + \mu_t)_{i,j-1}}{2} \left(\frac{(w_x)_{i,j} - (w_x)_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \right) + \rho_{i,k} (w_x)_{0,j}^2 \frac{m}{x_{i,j}}; \\
 & \frac{\rho_{i,j-1} (w_x)_{i,j-1} - \rho_{i-1,j-1} (w_x)_{i-1,j-1}}{\Delta x} + \frac{\rho_{i,j} (w_y)_{i,j} - \rho_{i,j-1} (w_y)_{i,j-1}}{\Delta y} = 0; \\
 & c_p \rho_{i,j} (w_x)_{i,j} \left(\frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \right) + c_p \rho_{i,j} (w_y)_{i,j} \left(\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} \right) = \\
 & = \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j+1} + \left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j}}{2} \left(\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} \right) - \frac{\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j} + \left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j-1}}{2} \left(\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \right) + \\
 & + (\mu + \mu_t)_{i,j} \left(\frac{(w_x)_{i,j} - (w_x)_{i,j-1}}{\Delta y} \right)^2 - \rho_{i,k} (w_x)_{i,j} (w_x)_{0,j}^2 \frac{m}{x_{i,j}}; \\
 & \rho_{i,j} = p / RT_{ij}, \\
 & \mu_{i,j} = \mu_0, \\
 & \lambda_{i,j} = \lambda_0, \\
 & (\mu_t)_{i,j} = f(y, c_f / 2 \dots), \\
 & (Pr_t)_{i,j} = 0.9.
 \end{aligned} \right. \quad (30)$$

Следует обратить внимание на то, что на расчётном i -ом слое по координате x неизвестными в системе уравнений (30) являются сразу несколько переменных $(w_x)_{i,j+1}, (w_x)_{i,j}, (w_x)_{i,j-1}, (w_y)_{i,j}, T_{i,j+1}, T_{i,j}, T_{i,j-1}$ и $\rho_{ij}, \mu_{ij}, \lambda_{ij}, (\mu_t)_{ij}, (Pr_t)_{ij}$. Синим цветом

выделены параметры, относящиеся к турбулентным характеристикам течения, определяемым из решения уравнений модели турбулентности.

В уравнениях движения и энергии каждая неизвестная связана с решением на соседних по j узлах расчётной сетки, остальные уравнения решаются явно. Для уравнений движения и энергии запишем выражения для коэффициентов трёхдиагональной матрицы:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\left(-\frac{\rho_{i,j}(w_y)_{i,j}}{\Delta y} - \frac{(\mu + \mu_t)_{i,j} + (\mu + \mu_t)_{i,j-1}}{2\Delta y^2} \right)}_{a_j} (w_x)_{i,j-1} + \\
 & + \underbrace{\left(\frac{\rho_{i,j}(w_x)_{i,j}^*}{\Delta x} + \frac{\rho_{i,j}(w_y)_{i,j}}{\Delta y} + \frac{(\mu + \mu_t)_{i,j+1} + 2(\mu + \mu_t)_{i,j} + (\mu + \mu_t)_{i,j-1}}{2\Delta y^2} \right)}_{b_j} (w_x)_{i,j} - \\
 & - \underbrace{\frac{(\mu + \mu_t)_{i,j+1} + (\mu + \mu_t)_{i,j}}{2\Delta y^2}}_{c_j} (w_x)_{i,j+1} = \underbrace{\frac{\rho_{i,j}(w_x)_{i,j}^*}{\Delta x} (w_x)_{i-1,j} + \rho_{i,k}(w_x)_{0,j}^2 \frac{m}{x_{i,j}}}_{d_j};
 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\left(-\frac{c_p \rho_{i,j}(w_y)_{i,j}}{\Delta y} - \frac{\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j} + \left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j-1}}{2\Delta y^2} \right)}_{a_j} T_{i,j-1} + \\
 & + \underbrace{\left(\frac{c_p \rho_{i,j}(w_x)_{i,j}}{\Delta x} + \frac{c_p \rho_{i,j}(w_y)_{i,j}}{\Delta y} + \frac{\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j+1} + 2\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j} + \left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j-1}}{2\Delta y^2} \right)}_{b_j} T_{i,j} - \\
 & - \underbrace{\frac{\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j+1} + \left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j}}{2\Delta y^2}}_{c_j} T_{i,j+1} = \\
 & = \underbrace{\frac{c_p \rho_{i,j}(w_x)_{i,j}}{\Delta x} T_{i-1,j} + (\mu + \mu_t)_{i,j} \left(\frac{(w_x)_{i,j} - (w_x)_{i,j-1}}{\Delta y} \right)^2 - \rho_{i,k}(w_x)_{i,j}(w_x)_{0,j}^2 \frac{m}{x_{i,j}}}_{d_j}
 \end{aligned} \quad (32)$$

Как видно новые источниковые члены уравнений добавились в коэффициент d_j трёхдиагональной матрицы. Однако часто бывает полезно перенести их в коэффициент b_j для того чтобы обеспечить условие диагонального преобладания. Сделать это можно

используя так называемую процедуру линеаризации источникового члена. Суть процедуры сводится к применению формулы для обобщённого источника $S_{i,j}$:

$$S_{i,j} = \omega S_{i,j} + (1-\omega) \frac{S_{i,j}}{f_{i,j}}, \quad (33)$$

где $\omega=0..1$ - весовой коэффициент. В результате применения этой формулы к источниковым членам, связанным с градиентом давления, соотношения (31) и (32) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left(\frac{\rho_{i,j}(w_y)_{i,j}}{\Delta y} - \frac{(\mu + \mu_t)_{i,j} + (\mu + \mu_t)_{i,j-1}}{2\Delta y^2} \right)}_{a_j} (w_x)_{i,j-1} + \\ & + \underbrace{\left(\frac{\rho_{i,j}(w_x)_{i,j}^*}{\Delta x} + \frac{\rho_{i,j}(w_y)_{i,j}}{\Delta y} + \frac{(\mu + \mu_t)_{i,j+1} + 2(\mu + \mu_t)_{i,j} + (\mu + \mu_t)_{i,j-1}}{2\Delta y^2} - (1-\omega_1)\rho_{i,k} \frac{(w_x)_{0,j}^2 m}{(w_x)_{i,j}^* x_{i,j}} \right)}_{b_j} (w_x)_{i,j} - \\ & - \underbrace{\frac{(\mu + \mu_t)_{i,j+1} + (\mu + \mu_t)_{i,j}}{2\Delta y^2}}_{c_j} (w_x)_{i,j+1} = \underbrace{\frac{\rho_{i,j}(w_x)_{i,j}^*}{\Delta x} (w_x)_{i-1,j} + \omega_1 \rho_{i,k} (w_x)_{0,j}^2 \frac{m}{x_{i,j}}}_{d_j}; \\ & \underbrace{\left(\frac{c_p \rho_{i,j}(w_y)_{i,j}}{\Delta y} - \frac{\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j} + \left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j-1}}{2\Delta y^2} \right)}_{a_j} T_{i,j-1} + \\ & + \underbrace{\left(\frac{c_p \rho_{i,j}(w_x)_{i,j}}{\Delta x} + \frac{c_p \rho_{i,j}(w_y)_{i,j}}{\Delta y} + \frac{\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j+1} + 2\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j} + \left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j-1}}{2\Delta y^2} + (1-\omega_2)\rho_{i,k} \frac{(w_x)_{i,j} (w_x)_{0,j}^2 m}{T_{i,j}^* x_{i,j}} \right)}_{b_j} T_{i,j} - \\ & - \underbrace{\frac{\left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j+1} + \left(\lambda + c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)_{i,j}}{2\Delta y^2}}_{c_j} T_{i,j+1} = \\ & = \underbrace{\frac{c_p \rho_{i,j}(w_x)_{i,j}}{\Delta x} T_{i-1,j} + (\mu + \mu_t)_{i,j} \left(\frac{(w_x)_{i,j} - (w_x)_{i,j-1}}{\Delta y} \right)^2 - \omega_2 \rho_{i,k} (w_x)_{i,j} (w_x)_{0,j}^2 \frac{m}{x_{i,j}}}_{d_j}} \end{aligned} \quad (35)$$

Коэффициенты трёхдиагональной матрицы для граничных условий:

$$\begin{aligned} & \boxed{0(w_x)_{i,-1}} + 1(w_x)_{i,0} + 0(w_x)_{i,1} = 0 \Rightarrow \boxed{(w_x)_{i,0} = 0} \\ & \boxed{0(w_x)_{i,k-1}} + 1(w_x)_{i,k} + \boxed{0(w_x)_{i,k+1}} = w_{x0} \Rightarrow \boxed{(w_x)_{i,k} = (w_x)_e} \\ & \boxed{0T_{i,-1}} + 1T_{i,0} + 0T_{i,1} = T_w \Rightarrow \boxed{T_{i,0} = T_w} \\ & \boxed{0T_{i,k-1}} + 1T_{i,k} + \boxed{0T_{i,k+1}} = T_0 \Rightarrow \boxed{T_{i,k} = T_e} \end{aligned} \quad (36)$$

Объединяя уравнения (31), (36) и записывая систему линейных уравнений в матричной форме, получим две трёхдиагональные матрицы, которые можно решить методом Томаса.

Поскольку в рассматриваемой задаче решение уравнения энергии влияет на решение уравнений движения и неразрывности и наоборот, то на каждом шаге интегрирования необходимо свести решения отдельных уравнений к общему решению. Для этого можно применить **метод простых итераций** (метод простой итерационной замены переменных), рассмотренный на предыдущей лабораторной работе.

8. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Получить задание для моделирования течения и теплообмена в турбулентном пограничном слое на пластине:

Среда	μ , [Па с]	c_p , [Дж/(кг град)]	λ , [Вт/(м град)]	M, [г/моль]	γ
Воздух (20 ⁰ С)	0,0000185	1005	0,026	29	1,41
Гелий (-40 ⁰ С)	0,0000167	5188	0,131	4	1,67
Водяной пар	0,0000161	1940	0,033	18	1,31
Гелий-ксеноновая смесь (95% ксенона) (200 ⁰ С)	0,0000382	410	0,067	50	1,67
Гелий-ксеноновая смесь (50% ксенона) (100 ⁰ С)	0,0000263	2675	0,160	7,8	1,67

Давление для всех случаев равно 101325 Па.

Длина пластины:

Скорость набегающего потока:

Температура набегающего потока:

Температура стенки:

Угол раствора клиновидной стенки:

2. Подготовить программу на языке Fortran, реализующую неявный метод численного интегрирования уравнений турбулентного динамического и теплового пограничных слоёв с устранением нелинейности и сопряжённости простым итерационным методом. **Применить для расчёта модель турбулентности Прандтля.**

3. Провести компиляцию и отладку программы.

4. Выполнить расчёты пяти профилей скорости, температуры и турбулентной вязкости на участке от x_0 до L на равном расстоянии друг от друга.

Построить графики в программе Excel, Origin или др. Сделать выводы о росте толщины динамического и теплового пограничных слоёв при турбулентном режиме течения **с градиентом давления**. Сделать вывод о влиянии числа Прандтля газа на отношение толщин теплового и динамического пограничных слоёв. Занести полученные данные в отчёт.

5. Применить для расчёта **модель турбулентности Себиси-Смита**.

6. Провести компиляцию и отладку программы.

7. Выполнить расчёты пяти профилей скорости, температуры и турбулентной вязкости на участке от x_0 до L на равном расстоянии друг от друга.

Построить графики в программе Excel, Origin или др. Занести полученные данные в отчёт. Сравнить с данными, полученными по модели Прандтля.

8. Выполнить расчёты интегральных параметров течения (локального коэффициента поверхностного трения, числа Нуссельта) в зависимости от локального числа Рейнольдса. Построить графики зависимости коэффициента трения и числа Нуссельта от числа Рейнольдса в логарифмических координатах. Нанести на график формулы

$$\text{Nu} = 0.0296 \text{Re}_x^{0.8} \text{Pr}_0^{0.43} \left(\frac{\text{Pr}_0}{\text{Pr}_{\text{ст}}} \right)^{0.25} .$$

Сделать выводы о влиянии числа Прандтля и числа Маха и параметра ускорения на сопротивление пластины и теплоотдачу от её сетки. Занести полученные результаты в отчёт.

9. Занести текст программы в отчёт.

10. Оформить отчёт. Подготовиться к защите лабораторной работы.

9. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЁТА

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Схема решаемой задачи с указанием расчётной области, граничных условий и параметров задачи.
4. Основные формулы, используемые при расчетах.
5. Результаты моделирования.
6. Тексты программ.
7. Выводы по работе.

10. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Уравнение Бернулли?
2. Понятия турбулентной вязкости и турбулентного числа Прандтля?
3. Влияние ускоряющего и тормозящего градиента давления на толщину пограничного слоя?
4. Распределение давления поперёк пограничного слоя?
5. Какие физические факторы, влияющие на развитие турбулентности, учитывает модель Себиси-Смита?
6. Что такое линеаризация источникового члена?
7. Почему турбулентное число Прандтля близко к единице?